CAPÍTULO 4

LA INTEGRACIÓN CURRICULAR EN UN PROGRAMA DE FORMACIÓN DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS: EL PENSAMIENTO GEOMÉTRICO

Curricular integration in a mathematics teacher training program: geometric thought

ELIZABETH HURTADO MARTÍNEZ
Universidad de la Amazonia, Magister en Docencia de las Matemáticas, Docente Planta Tiempo Completo,
Licenciatura en Matemáticas, Colectivo de Investigación en Educación Matemática – CIEM.
Código ORCID: https://orcid.org/0000-0001-9374-4145
Link Google Scholar: https://scholar.google.com/citations?view_op=list_works&hl=es&user=P3ZHFdEAAAAJ
Link Researchgate: https://www.researchgate.net/profile/Elizabeth-Hurtado-Martinez
Email institucional: e.hurtado@udla.edu.co

ALIRIO QUESADA SALAZAR
Universidad de la Amazonia, Magister en Docencia de las Matemáticas, Docente Planta Tiempo Completo,
Licenciatura en Matemáticas, Colectivo de Investigación en Educación Matemática – CIEM.
Código ORCID: https://orcid.org/0009-0005-8831-2467
Link Google Scholar: https://scholar.google.es/citations?hl=es&user=P5oT8U0AAAAJ
Link Researchgate: https://www.researchgate.net/profile/Alirio-Quesada-Salazar
Email Institucional: a.quesada@udla.edu.co

SAMUEL MORALES PARRA
Institución Educativa Escuela Normal Superior de Florencia, Magister en Docencia de las Matemáticas,
Docente en Ejercicio, Educación Secundaria y Media, Colectivo de Investigación en Educación Matemática – CIEM.
Email institucional: s.morales@udla.edu.co

JUAN ALEXANDER TRIVIÑO QUICENO
Universidad de la Amazonia, Magister en Docencia de las Matemáticas, Docente Planta Tiempo Completo,
Licenciatura en Matemáticas, Colectivo de Investigación en Educación Matemática – CIEM.
Código ORCID: https://orcid.org/0000-0003-0500-7968
Link Google Scholar: https://scholar.google.com/citations?hl=es&user=z3vBBlMAAAAJ
Link Researchgate: https://www.researchgate.net/profile/Juan-Trivino-Quiceno
Email institucional: j.trivino@udla.edu.co

Como citar este capítulo: Hurtado Martínez, E.; Quesada Salazar, A.; Morales Parra, S. y Triviño Quiceno, J.A. (2023). La integración curricular en un programa de formación de profesores de matemáticas: el pensamiento geométrico. En Universidad de la Amazonia - UNIAMAZONIA. *Investigación interdisciplinaria Universidad de la Amazonia - Libro resultado de investigación*. (1er edición. pp. 146). Editorial Universidad de la Amazonia. DOI: 10.47847/9786287693098.4

RESUMEN

El proyecto de investigación “Diseño de Unidades Didácticas para los Programas de Curso Geometrías y El problema de la Congruencia y la Semejanza: Una propuesta para formación de profesores en la Licenciatura Matemáticas y Física”, que se articula con el proyecto macro de investigación “Diseño, implementación y evaluación de propuesta curricular a partir del análisis didáctico: Una propuesta para la formación de profesores en la Licenciatura Matemáticas y Física de la Universidad de la Amazonia”, se diseñó con el propósito de promover los procesos de integración curricular en la Licenciatura a través del proceso de construcción colectiva de los microcurriculos de los espacios académicos del plan de estudio, favoreciendo posibilidades de a transversalidad, integralidad y flexibilidad en su gestión.

Palabras claves: Análisis didáctico, objetivos de aprendizaje, capacidades, competencias, tarea matemática.

ABSTRACT

The research project "Design of Didactic Units for the Geometry Course Programs and the problem of Congruence and Similarity: A proposal for teacher training in the Mathematics and Physics Degree", which is articulated with the macro research project "Design , implementation and evaluation of the curricular proposal from the didactic analysis: A proposal for the training of teachers in the Mathematics and Physics Degree of the Universidad de la Amazonia", was designed with the purpose of promoting the processes of curricular integration in the Degree through through the process of collective construction of the microcurricula of the academic spaces of the study plan, favoring possibilities of transversality, integrality and flexibility in its management.

Keywords: Didactic analysis, learning objectives, abilities, competences, mathematical task.

INTRODUCCIÓN

La investigación permitió el diseño integrado de una unidad didáctica con los espacios académicos que sustentan el pensamiento geométrico en la Licenciatura en Matemáticas y Física en la formación del profesor desde los saberes didácticos y matemáticos, geometrías y el problema de las congruencias y semejanzas, respectivamente. La unidad didáctica se estructuró en diferentes tareas que fueron gestionadas en el aula de clase, cada tarea se diseñó desde el modelo Análisis Didáctico, referente que moviliza a los profesores a pensar sobre las matemáticas que se abordaran en el aula (análisis de contenido), las aprendizajes que se pretenden movilizar (análisis cognitivo), la metodología que implementará el profesor para lograrlo (análisis de la instrucción) y la forma de evaluar los aprendizajes (Análisis de la actuación). En el documento se presenta el desarrollo del proceso en el marco de una de las tareas diseñadas y pensadas para los profesores en formación.

Planteamiento del problema y justificación.

En los últimos cinco años, el Colectivo de Investigadores en Educación Matemática viene desarrollando su actividad investigativa en el contexto del conocimiento didáctico de los profesores de matemáticas, particularmente en las posibilidades que ofrece el análisis didáctico para el diseño, gestión y evaluación de procesos curriculares en la formación de profesores de matemáticas y física. El proyecto de investigación "Diseño de Unidades Didácticas para los Programas de Curso Geometrías y El problema de la Congruencia y la Semejanza: Una propuesta para formación de profesores en la Licenciatura Matemáticas y Física", que se articula con el proyecto macro de investigación "Diseño, implementación y evaluación de propuesta curricular a partir del análisis didáctico: Una propuesta para la formación de profesores en la Licenciatura Matemáticas y Física de la Universidad de la Amazonia", están delimitados a un contexto local: la formación del profesor de matemáticas de la Universidad de la Amazonía.

La investigación se planteó como una posibilidad para fortalecer la línea de investigación en didáctica de las matemáticas; así mismo, aportar información sobre el conocimiento didáctico que tienen los estudiantes de la Licenciatura en Matemáticas y Física, con el propósito de generar programas de formación que integren el saber matemático con el didáctico-pedagógico; el aporte de la investigación a los desarrollos curriculares de la licenciatura se ven reflejados en las prácticas matemáticas en el aula. En consecuencia, la investigación se orientó a dar respuesta al interrogante: ¿Cómo diseñar, gestionar y evaluar la Unidad Didáctica, para la orientación de los espacios académicos "¿Las

Geometrías y el Problema de la Congruencia y de la Semejanza" a partir del Análisis Didáctico, como posibilidad de articulación del saber matemático y su didáctica?

METODOLOGÍA

Para el desarrollo de la investigación se estructuró una metodología en las siguientes fases: FASE I: De conceptualización: Esta fase comprendió los procesos de conceptualización de los contenidos matemáticos sobre las transformaciones geométricas (Isométricas e Isomórficas) en el plano, FASE II: De diseño: En esta fase se diseñó y construyó una unidad didáctica sobre las transformaciones geométricas (Isométricas e Isomórficas) en el plano. FASE III: De gestión en el aula de matemáticas: Se gestionó en el aula de matemáticas, con los estudiantes del 2° Semestre del programa de la licenciatura. FASE IV. Evaluación de impacto: En esta fase se evaluó el impacto de la unidad didáctica diseñada, construida e implementada en la formación inicial del profesor de matemáticas y física.

RESULTADOS Y DISCUSIÓN

En este apartado se presentan los resultados alcanzados en el desarrollo de la investigación asociados al análisis del contenido, el diseño y gestión de las tareas matemáticas.

Análisis del contenido de enseñanza

El diseño de la unidad didáctica que sustento el proceso de integración curricular, se sustentó a partir de modelo curricular Análisis Didáctico (Gómez, 2007), el modelo se propone como una herramienta para que los profesores de matemáticas fortalezcan el diseño de currículos locales (preparación de una clase de matemáticas) a partir de procesos de reflexión y análisis de las matemáticas, su enseñanza y su aprendizaje, el modelo incorpora cuatro tipos de análisis que se sustentan desde las componentes curriculares: contenido (análisis de contenido), objetivos (análisis cognitivo), metodología (análisis de la instrucción) y evaluación (análisis de la actuación).

El primer análisis, de contenido, le permite al profesor de matemáticas reflexionar y tomar decisiones para planear su clase a partir de la pregunta ¿Qué enseñar?, para responder el interrogante el profesor estudia el contenido matemático que sustenta la clase, a partir de los diferentes significados que pueden abordar su comprensión, sus distintas formas de ser representado y los diferentes fenómenos que lo sustentan.

El segundo análisis, cognitivo, le permite al profesor de matemáticas reflexionar y tomar decisiones para planear su clase a partir de la pregunta ¿Qué espero que los estudiantes aprendan del contenido matemático?, para responder el interrogante el profesor analiza la información que obtuvo del análisis de contenido, reflexiona y decide sobre los objetivos de aprendizaje que esperan alcancen los estudiantes al abordar la comprensión del contenido, igualmente decide sobre las capacidades que se espera desarrollen y las competencias matemáticas que se pueden fortalecer desde las distintas tareas que se diseñen para su enseñanza, finalmente identifica las posibles dificultades y errores en que pueden incurrir los estudiantes al aprender el contenido, como información útil para aportar desde las prácticas de enseñanza del profesor a resolverlas en el momento de gestión.

El tercer análisis, de instrucción, le permite al profesor de matemáticas reflexionar y tomar decisiones para diseñar tareas matemáticas que favorezcan el aprendizaje del contenido matemático, la pregunta que se plantea el profesor en este análisis para la planeación de su clase será ¿Cómo lograr que los estudiantes aprendan el contenido matemático?, para responder el interrogante el profesor acude a la información obtenida tanto del análisis de contenido como cognitivo, para identificar los elementos sustanciales que sustentaran el diseño de las tareas matemáticas, además de haber realizado acciones que le permitan identificar las posibilidades y necesidades tanto del contexto escolar como del estudiante, información relevante para otorgar sentido y pertinencia a la tarea, igualmente el profesor decide sobre los materiales y recursos requeridos para la gestión de la tarea. Para el diseño de la unidad didáctica se acogió el modelo descrito, definiendo las particularidades conceptuales del contenido matemático, las expectativas de aprendizaje y el diseño de tareas matemáticas.

Diseño y gestión de tareas matemáticas para abordar las trasformaciones geométricas en el plano, desde el análisis didáctico.

Es conveniente aclarar que en la Unidad Didáctica se diseñaron cinco grandes Tareas (cada una con sus respectivos objetivos de aprendizaje, capacidades, competencias, dificultades, errores y caminos de aprendizaje), ellas fueron:

TAREA 1: Transformaciones isométricas:
TAREA 1A: Traslación, rotación, reflexión, con herramientas convencionales.
TAREA 1B: Traslación, rotación, reflexión, con herramientas tecnológicas.
TAREA 2: Transformaciones isomórficas con herramientas convencionales
TAREA 2A: Transformaciones isomórficas – homotecia con geometría dinámica

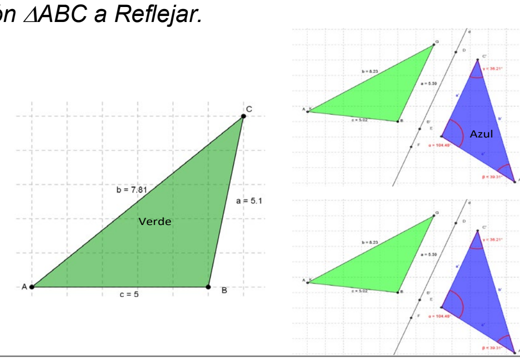
TAREA 2B: Transformaciones isomórficas – semejanza y teorema de thales con geometría dinámica.
TAREA 3: Fenomenología de las transformaciones isomórficas: teorema de thales – semejanza.
TAREA 4: Fenomenología de las Transformaciones Isométricas.
TAREA 5: Las Transformaciones Geométricas: en los Libros de Texto y en Reportes de Investigación

La implementación de las tareas matemáticas que hace parte de la Unidad Didáctica "Transformaciones Geométricas en el Plano" se llevó a cabo en el desarrollo de los períodos de clase de las asignaturas: Las Geometrías, en el horario de los días miércoles, y en las horas de clase del espacio académico "Los problemas de la Congruencia y de la Semejanza", los días martes y jueves; cuando los estudiantes desarrollan su actividad en equipos de trabajo siempre contaron con la presencia activa y la asesoría de los profesores que orientan las dos asignaturas; se hizo grabaciones en video y adicional a esto se diligenció el diario del profesor, con el conjunto de ayudas previstas para cada una de las sesiones de trabajo. En las siguientes tablas se presentan el diseño de las actividades para la Tarea 1B "Traslación, Rotación, Reflexión, con Herramientas Tecnológicas"; la descripción de las actuaciones de los profesores en formación y las reflexiones de los profesores investigadores.

Tarea Transformaciones Isométricas con Software de Geometría Dinámica

Objetivos de Aprendizaje:

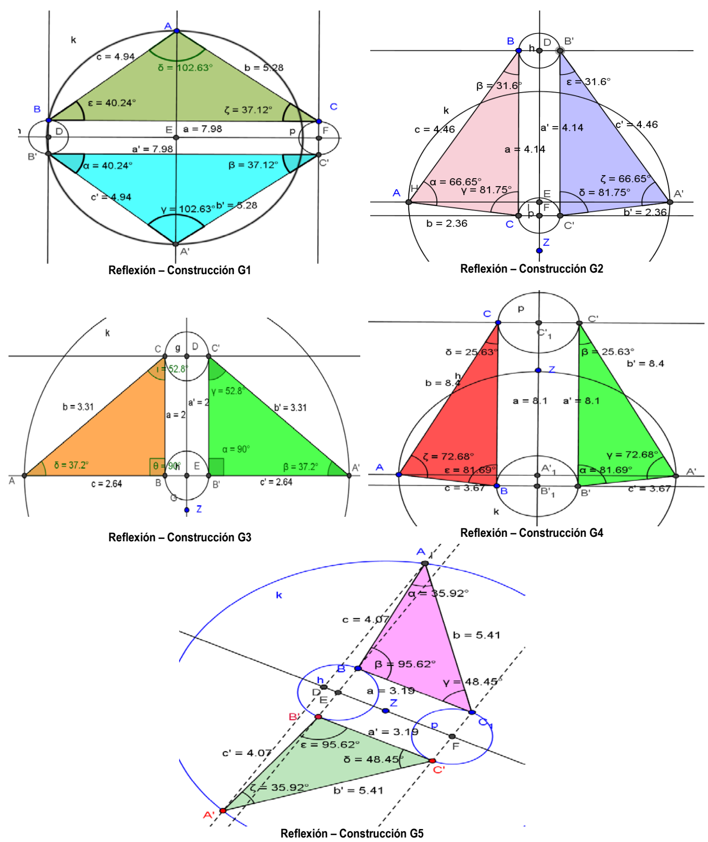
1. Clasificar la transformación isométrica dada en el plano
2. Identificar propiedades comunes entre una figura y su imagen, luego de una transformación isométrica en el plano.
3. plicar las transformaciones isométricas en diversas situaciones, con el apoyo de herramientas.

TIPO DE TRANSFORMACIÓN: REFLEXIÓN		
Actividad de la tarea	**Actuaciones de los profesores en formación**	**Reflexiones**
Actividad 1: **Construya un triángulo: ∆ABC (coloréelo); mida y nombre (con minúsculas) cada lado con el del vértice opuesto.**	Cada uno de los equipos logró desarrollar la construcción pedida haciendo uso del Programa de Geometría dinámica GeoGebra, tal como se muestra en las siguientes figuras: **Figura 1.** *Construcción ∆ABC a Reflejar.* 	

<table>
<tr>
<td>Actividad 2: Desde cada vértice trace rectas perpendiculares a la recta que pasa por el punto Z.

Determine el punto de intersección entre la recta que pasa por Z y cada una de las perpendiculares que trazó en el paso anterior.
Traces circunferencias con centro en cada punto de intersección y radio hasta el vértice correspondiente.

</td>
<td>Los grupos de trabajo hicieron la construcción pedida a partir de las orientaciones dadas para el uso del programa de geometría dinámica.</td>
</tr>
<tr>
<td>Actividad 3: Determine los correspondientes puntos de intersección: A’, B’, C’, asígnele a cada uno la etiqueta correspondiente.</td>
<td>Cada equipo de trabajo logró la localización correcta de los vértices de la que será la imagen.

Figura 2.
Puntos de Intersección A´, B´, C´.


</td>
</tr>
<tr>
<td>Actividad 4: Al trazar las circunferencias y determinar los correspondientes puntos de intersección: A’, B’, C’, ¿qué se está garantizando? Justifique su respuesta.</td>
<td>Respuestas:
G.1: Garantiza que la distancia de los vértices con respecto a la recta va a ser la misma que los puntos A’, B’, C’.
G.2: Se está garantizando que la distancia entre los puntos C respecto al punto O de la recta que la distancia B del polígono al punto E de la recta, y la distancia del punto A del polígono al punto F de la recta son iguales a las distancias DC’, EB’, FA’, respectivamente por lo que podemos decir que la recta d es la mediatriz.
G3: Que los puntos ABC van a estar a la misma distancia de la paralela que los puntos A’B’C’</td>
</tr>
</table>

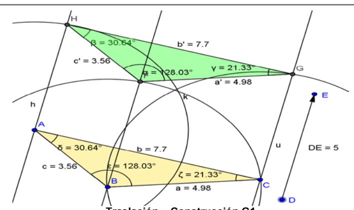
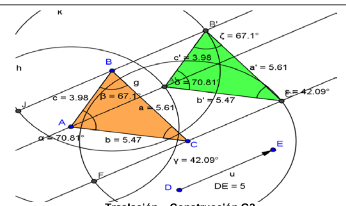
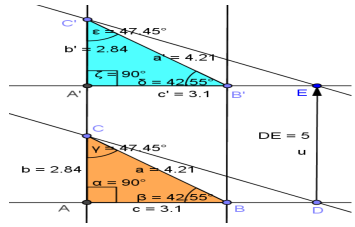
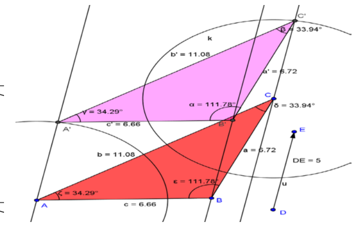
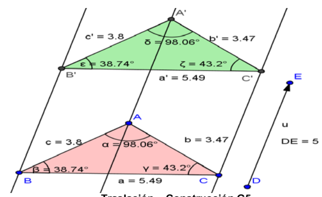
	G4: Al trazar las circunferencias se está garantizando que los puntos A'B'C': Sean la misma distancia Que esté a la misma distancia de la paralela Que sea la misma figura con las mismas medidas. G5: Que tenga la misma distancia de la recta a los vértices de cada figura.
Actividad 5: **Con la opción polígono construya el ∆A'B'C'; Mida correctamente las longitudes de los lados y la amplitud de los ángulos internos, triángulo imagen; ∆A'B'C'.**	A excepción del equipo número tres al que probablemente olvidó medir la amplitud de los ángulos de la imagen, los otros cuatro grupos lograron el desarrollo de la construcción pedida con las medidas requeridas.
Actividad 6: **Establezca la razón entre las longitudes de pares de lados correspondientes; ¿ese resultado le insinúa algún tipo de relación entre la figura y su imagen?, si__, no__, justifique su respuesta.** **La razón entre cada par de lados correspondientes de la preimagen y la imagen la hizo cada equipo de trabajo utilizando el cálculo mental, ya que no aparece registro escrito ni en papel ni en el programa GeoGebra; además, previamente observando las medias de los lados y de los ángulos en la construcción, constataron que las medias son iguales y el cociente de cada la razón es igual a uno**	En relación con la pregunta: ¿Ese resultado le insinúa algún tipo de relación entre la figura y su imagen? Se lograron las siguientes respuestas: G1: la razón es que $\frac{a}{a'} = \frac{4.44}{4.44} = 1$. La relación es que a' está 1 vez en a de tal forma que son totalmente iguales en cuanto a las magnitudes de sus lados. G2: $\frac{a}{a'} = 1$, $\frac{b}{b'} = 1$, $\frac{c}{c'} = 1$ G3: Si, porque las longitudes de pares de lados correspondientes siguen conservando sus valores, la imagen y la preimagen son congruentes. G4: Claro que el resultado nos insinúa que las longitudes si tuvieron una relación entre su imagen y preimagen ya que sus lados constituidos fueron de igual medida, esto nos dice que son congruentes. G5: Si la razón es 1 por lo tanto se puede decir que sus lados son congruentes. A los estudiantes se les dificulta expresar explícitamente que la relación entre las medias de los pares de lados correspondientes es de igualdad, dado el resultado de la razón entre los mismos.
Actividad 7: **Identifique y marque cada par de ángulos y lados correspondientes (homólogos). ¿Qué relación existe entre las medidas correspondientes de los ángulos y lados homólogos?**	Respuestas: G 1: La relación es que la magnitud de los ángulos y sus lados es igual en la imagen y su homóloga. G 2: Si hay un tipo de relación entre la figura y su imagen ya que la longitud de los lados correspondientes es igual en cuanto a su longitud y lo mismo podemos decir de sus ángulos. G 3: La relación es que son directamente proporcionales, es decir, que si cambiamos el valor de un lado variará el valor de un ángulo, o viceversa, relación. G 4: Se pudo observar que la medida de sus ángulos es la misma que la imagen donde sus magnitudes son iguales lo único que cambia es su dirección por tal motivo sus ángulos internos tienen igual medida. G 5: La relación que existe es que son iguales, tienen la misma dimensión. Con la afirmación del grupo G3 se evidencia una concepción equívoca del concepto de relación directamente proporcional y además de confusión entre ésta y la relación de igualdad; adicional a esto se puede inferir que este equipo de trabajo asocia la medida de la amplitud del ángulo con la medida de la longitud de los lados; es decir, no reconocen que los lados de los ángulos son rayos o semirrectas y como tal estas no tienen longitud totalmente definida
Actividad 8: **Ahora, desplace cualquiera de los vértices del ∆ABC; observe las medidas de**	Respuestas: G1: Los ángulos y los lados de la preimagen cambian con respecto al vértice que se mueva, de igual forma su homólogo.

pares de lados y de ángulos correspondientes. Describa sus observaciones, justificando sus interpretaciones.	G2: Se puede observar que, aunque las medidas de los lados en la preimagen, al igual que sus ángulos son desiguales, en la imagen estos toman las medidas que tiene la preimagen en sus lados y ángulos correspondientes. G3: Cambian sus valores proporcionalmente al vértice desplazado. G4: Al observar las medidas de pares de lados correspondientes nos damos cuenta que al mover cualquiera de los vértices de la preimagen, su imagen también se mueve conservando igual medida y esto se debe a que la imagen debe estar ubicada a la misma distancia de la pre imagen. Vale la pena aclarar que esta afirmación es cierta: la distancia entre la preimagen y la recta debe ser igual a la distancia entre esta última y la imagen, no obstante, el equipo quiso hacer referencia que al movilizar un vértice varían las medidas de los lados y también las de los ángulos, pero que estas se mantienen iguales a las correspondientes en la imagen. G5: Se conservan sus características homólogas.
Actividad 9: **Sin necesidad de medir la longitud de los lados ni la amplitud de los ángulos en el ∆A'B'C', se puede garantizar que éstas son correspondientemente iguales a las de la preimagen, ¿por qué?**	Respuestas: G 1: Por el concepto de reflexión que se viene manejando; que al reflejar una preimagen con respecto a una recta paralela, la imagen resultante va a ser isométrica (son de igual medida). G 2: Si porque la imagen es el reflejo de la preimagen ya que las circunferencias nos aseguran distancias iguales desde los vértices a la recta y desde la recta a los vértices de la imagen. G 3: Si, porque es una reflexión, las medidas de los ángulos y longitudes son congruentes. G 4: El programa GeoGebra es un software práctico para realizar estos ejercicios didácticos. Al hacer la reflexión nos basamos en una paralela y 3 perpendiculares, 3 circunferencias para que al realizar movimiento de algún punto estas conserven sus medidas, ángulos, lados y todas sus características. G 5: Si porque si se hace el proceso de reflexión bien hecho, se garantiza que la imagen es la misma a la preimagen. A los equipos de trabajo que utilizan el término recta paralela, les hizo falta aclarar que se trata de una recta paralela a uno de los lados de la preimagen; en este caso al lado a del triángulo ABC. *Ahora borre la imagen del triángulo ABC;* trace una recta paralela al lado ***a*** y *con la opción **Simetría Axial,** construya la imagen reflejada con respecto a la recta.* *Cada equipo de trabajo hizo esta nueva construcción usando el software GeoGebra.*
Actividad 10: **Haga los desplazamientos necesarios para sobreponer las partes correspondientes de las dos figuras (preimagen e imagen). Explique por qué es o no posible lograrlo. ¿Qué tipo de trasformación es esta?**	Respuestas: G1: No es posible lograrlo porque habría que sacarla del plano para poder sobreponer todas sus partes correspondientes. Es una transformación indirecta. G 2: No porque es una transformación indirecta, es decir solo deslizando la imagen no podemos sobreponer exactamente una con la otra. Tendríamos que sacar la imagen del plano, y darle la vuelta, para poder superponerla. G 3: No se puede sobreponer la imagen con la preimagen porque es una transformación inversa, el sentido del homólogo y del original son contarios. G 4: No respondieron esta pregunta. G 5: No se puede logar porque para igualar la imagen a la preimagen tendríamos que sacarla del plano ya que es una trasformación indirecta. Inferimos que el grupo G4 tuvo dificultades para reconocer que cuando se trabaja con transformaciones indirectas, como la reflexión, hay un

	cambio de dirección, lo que imposibilita que con el solo desplazamiento de la pre-imagen se pueda hacer coincidir con la imagen.	

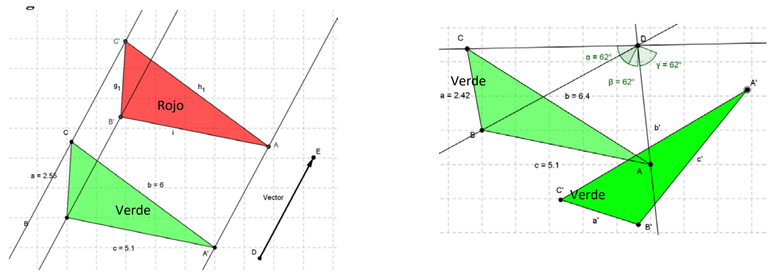
Tipo de transformación: Traslación: **Ahora vamos a trasladar el** *$\triangle ABC$* **a lo largo del vector** $\overrightarrow{DE}$

Actividad de la tarea	Actuaciones de los profesores en formación	Reflexiones
Actividad 1: **Construya un triángulo: ∆ABC (coloréelo); mida y nombre (con minúsculas) cada lado con el del vértice opuesto. Trace el vector** $\overrightarrow{DE}$	Cada equipo de trabajo logró Construir el triángulo: ∆ABC (colorearlo); midió y nombró cada lado con el del vértice opuesto; también trazó y midió un vector $\overrightarrow{DE}$ y desde cada vértice trazó rectas paralelas al vector.	
Actividad 2: **Se necesita trasladar la magnitud del** $\overrightarrow{DE}$ **a cada vértice del triángulo, de tal manera que su magnitud quede explicita sobre la recta que pasa por el vértice, ¿cómo se logra?**	Sobre la recta que pasa por cada vértice del ***∆ABC*** ubique los correspondientes puntos ***A', B', C'*** G1: Tomando el radio de una circunferencia, teniendo en cuenta que en el vector el punto centro es O y en el triángulo ABC el punto centro será cada vértice. La intersección de cada circunferencia con la recta será la magnitud del vector, teniendo en cuenta el sentido del vector. G2: Para trasladar la magnitud del vector, trazamos rectas paralelas al vector, asegurándonos que las rectas pasen por los vértices A, B, C, correspondientemente, luego con la opción de compás establecimos la distancia del punto D al E [esta corresponde a la longitud del Vector $\overrightarrow{DE}$] tomando como centro el D y como extremo el E, quedando la magnitud del vector como el radio de la circunferencia, luego trasladamos el compás sobre cada uno de los vértices A, B, C. G3: Se logra haciendo una recta del punto de origen del vector al vértice, luego se traza una paralela de la recta a la cabeza del vector, además de una paralela del vector con respecto al punto, luego, se halla el punto de intersección entre la paralela de la recta a la cabeza del vector y la paralela del vector con respecto al vértice, de la misma manera con los demás vértices. G4: Lo que se tiene en cuenta para el desplazamiento del triángulo A'B'C' es: Distancia del vector con la opción compás de un punto a su extremo sería el radio de la circunferencia, y esa misma distancia la ubicamos en cada punto de la preimagen, y colocamos punto en el extremo de la circunferencia que esta sería la misma distancia del vector. El término distancia del vector, hace referencia a la magnitud del vector $\overrightarrow{DE}$ que ésta corresponde a la longitud del radio de la circunferencia que se va a trazar utilizando la opción compás. El equipo de trabajo, G 5: no redactó el procedimiento correspondiente a los procesos desarrollados para lograr copiar la magnitud del vector $\overrightarrow{DE}$ y su traslado a cada vértice de la preimagen, no obstante logró la construcción pedida con el apoyo del programa de geometría dinámica.	
Actividad 3: **Con la opción polígono construya el ∆A'B'C'.**	**Figura 3.** *Construcción Polígonos $\triangle A´B´C´$.*	

	 Traslación – Construcción G1  Traslación – Construcción G2  Traslación – Construcción G3  Traslación – Construcción G4  Traslación – Construcción G5 Cada equipo logró la construcción del polígono correspondiente al ∆A'B'C'; en algunos casos las etiquetas no son exactamente estas, tal vez porque para ellos no era significativo el cambio de las mismas en relación con las dadas por el programa GeoGebra o porque empezaban a tomar conciencia del tiempo de clase transcurrido hasta ese momento.
Actividad 4: **Comparando los dos triángulos ¿Hay cambio en las medidas del objeto trasladado?, ¿por qué puede estar sucediendo lo que afirma en su respuesta?**	Respuestas: G1: No hay cambios en las medias ya que al aplicar el movimiento de cada punto con respecto a la dirección, sentido y magnitud del vector lo que hacemos es una traslación. G2: No hay cambios en las medidas del objeto trasladado, porque los vértices son trasladados en la misma dirección y magnitud del vector $\overrightarrow{DE}$. G3: No hay cambios en las medidas del objeto trasladado porque la traslación es un movimiento directo, es decir, que se puede sobreponer la preimagen con la imagen y van a encajar sus vértices. [Aquí era de esperarse el mismo tipo de respuesta, sustentada en la construcción desarrollada: traslado de cada vértice a lo largo de una paralela al vector y a una distancia correspondiente a la magnitud de éste; pero la sustentó con base en el tipo o clase de trasformación isométrica] G4: Comparando los dos triángulos no hubo ningún cambio en el objeto trasladado; ya que lo único que se hizo fue cambiar de sitio la figura, pero conservando su sentido, magnitudes y dirección. "trasformación directa". G5: No hay cambio en las medidas de estas porque se están desplazando los vértices de la figura en la misma dirección, sentido y longitud del vector.
Actividad 5: **¿Qué se tiene en cuenta para el desplazamiento del ∆A'B'C'?**	Respuestas: G1: Se tiene en cuenta el vector $\overrightarrow{DE}$. G2: Para desplazar el triángulo ABC se debe tener en cuenta: la dirección, magnitud y sentido del vector $\overrightarrow{DE}$ con el fin de que los vértices se desplacen de igual manera, y la figura conserve sus medidas. G3: La magnitud, el sentido y la dirección del vector (otro vector) G4: Lo que se tiene en cuenta para el desplazamiento del triángulo A'B'C' es: Distancia del vector: con la opción compás de un punto a su extremo sería el radio de la circunferencia, y esa misma distancia la ubicamos en cada punto de la preimagen, y colocamos punto en el extremo de la circunferencia que esta sería la misma distancia del vector. Después unimos los 3 puntos con la opción polígono y lo nombramos ∆A'B'C'

	Correspondientemente a su homólogo – congruente. Sus medidas de la preimagen y la imagen son homólogas – congruentes. G5: Se tiene en cuenta vector $\overrightarrow{DE}$ como referencia.
Actividad 6: **¿En qué dirección se desplaza el ∆A'B'C'? ¿De qué magnitud es la traslación del triángulo ∆A'B'C'?**	Respuestas: G1: Se desplaza en la dirección del vector $\overrightarrow{DE}$. G2: En la misma dirección del vector y la magnitud es la misma del vector. G3: En la dirección del vector que es de 90° hacia el norte, y la magnitud es la del vector $\vec{V}$ = [0; 2,95] G4: El triángulo A'B'C' se desplaza hacia la dirección del vector (nororiente) y la magnitud del vector des de 2,57cm [Este equipo tuvo en cuenta únicamente el valor de una de las dos coordenadas correspondientes a una de las dos componentes cartesianas del vector $\overrightarrow{DE}$] G5: En la dirección que indica el vector de referencia. Es de la misma magnitud del vector que utilizamos como referencia.
Actividad 7**: Desplace cualquiera de los vértices del** *∆ABC,* **observe lo que sucede con las medidas del triángulo imagen (por traslación). Qué sucede con el ∆A'B'C' al desplazar cualesquiera de los vértices del ∆ABC**	El grupo G 1 se limitó a observar lo que sucede con las medidas del triángulo imagen (por traslación) y no respondió explícitamente en forma escrita a la pregunta y se la reservó para registrarla en la siguiente (pregunta No. 8). G2: Al desplazar cualquiera de los vértices del ∆ABC se observa que las medidas del triángulo imagen conservan las mismas medidas con respecto a la preimagen. G3: Siguen conservando sus mismas características (longitud, ángulos, etc) G4: Sus medidas de la preimagen y la imagen son homólogos – congruentes. Lo que sucede con las medidas del triángulo de la preimagen y la imagen es: al mover cada punto del ∆ABC (preimagen), observamos que los putos de ∆A'B'C' (imagen) se mueven exactamente igual y conserva sus medidas, sus ángulos y sus distancias en el plano. G5: Se sigue manteniendo la congruencia de sus ángulos y sus lados correspondientes.
Actividad 8: **Describa y justifique ampliamente sus observaciones.**	Respuestas: G1: La distancia de los lados cambia con respecto al vértice que se mueve y de igual forma las magnitudes cambian en el homólogo del triángulo ABC, pero las magnitudes serán iguales en la imagen y preimagen. G2: En la traslación podemos observar que es una transformación directa ya que no necesitamos de sacar la imagen del plano, para poder superponerlas, de tal forma que se cubran totalmente la una a la otra. Eso también nos indica, que las medidas de los ángulos y los lados se conservan después de la traslación. G3: Si cualquier vértice de la preimagen, la imagen adoptará las mismas características de la preimagen (longitud, ángulos, etc) G4: En las respectivas observaciones se puede decir que la traslación es un movimiento directo sin cambios de orientación, es decir, mantienen la forma y el tamaño. Por otro lado, al mover un vértice de la figura original se puede observar que las medidas cambian de manera similar es decir si una cambia la otra también en igual medida. La traslación se mueve en dirección, sentido y magnitud del vector. G5: Se puede observar que este tipo de transformación es directa ya que si desplazamos cualquiera de las dos figuras una hacia la otra se puede superponer una sobre la otra de forma perfecta. En cualquiera de las cinco respuestas anteriores, si se pretende la superposición se debe desplazar el extremo vector para hacer que la magnitud de éste se reduzca a cero.

Figura 4.
Construcción ∆A´B´C´.



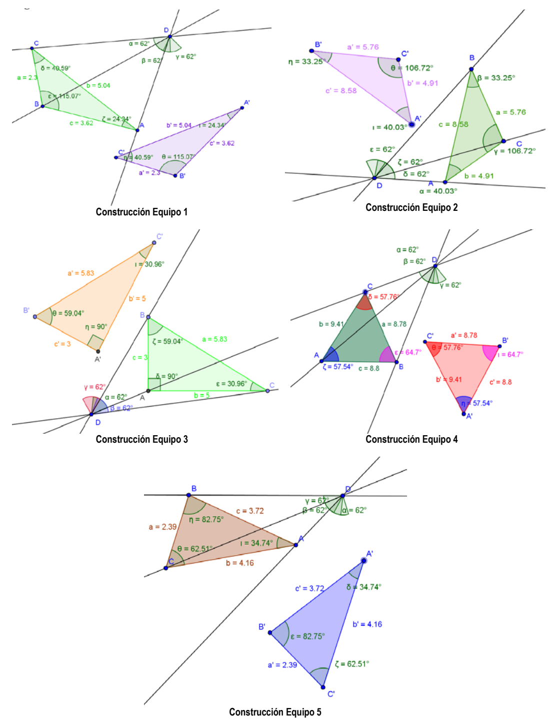
Actividad 9**: Ahora borre la imagen del triángulo ABC; trace el $\overrightarrow{\mathbf{DE}}$ que no interseque al triángulo y construya la imagen trasladada con respecto al $\overrightarrow{\mathbf{DE}}$.**	Cada equipo de trabajo logró construir la trasformación geométrica de traslación del triángulo ABC trazando el vector $\overrightarrow{\mathrm{DE}}$ que no intersecara al triángulo preimagen.
Actividad 10: **Haga los desplazamientos necesarios para sobreponer las partes correspondientes de las dos figuras. Explique por qué es o no posible lograrlo. ¿Qué tipo de trasformación es esta?**	G1: Es posible si lo que hacemos es mover el vector, es decir que el vector que hicimos inicialmente lo restamos toda su magnitud hasta cero de tal modo que se cumple la norma de la transformación directa que solo se desliza la figura se puede sobreponer una sobre otra. G2: Es posible sobreponer las partes correspondientes de las dos figuras debido a que tenemos una trasformación directa que sólo con deslizar la imagen hacia la preimagen cada punto corresponde este proceso se logra con la reducción de la magnitud del vector $\overrightarrow{\mathrm{DE}}$ a cero. G3: Si es posible sobreponer la imagen con la preimagen o viceversa, porque es un movimiento directo; es una trasformación directa, es decir, el homólogo conserva el sentido del original en el plano cartesiano. El grupo G4 no respondió explícitamente la pregunta, sin embargo, está el archivo que contiene la construcción pedida. G5: Si se puede lograr ya que ésta es una transformación directa, donde solamente moviendo la imagen original se puede superponer a la otra y viceversa en este caso reducimos la longitud del vector a cero y las dos imágenes quedan superpuestas coincidiendo sus lados y ángulos.

TIPO DE TRANSFORMACIÓN: ROTACIÓN		
Actividad de la tarea	**Actuaciones de los profesores en formación**	**Reflexiones**
Actividad 1: **Ahora vamos a rotar el triángulo** *∆ABC,* **(el que se ha tenido como original – Verde); Ubique un punto (***D***) cercano al vértice** *A*; **Figura 4. Traces rectas** $\overleftrightarrow{AD}$ **,** $\overleftrightarrow{BD}$ **,** $\overleftrightarrow{CD}$ **.** **Elija la opción:** *ángulo dada su amplitud*, **y desde cada vértice trace en sentido antihorario un ángulo de 62°** Actividad 2: **Elija la opción** *polígona* **y construya el** *∆A'B'C'.* **Observe una imagen como la de la Figura 4.** **Cada equipo de trabajo logró la construcción de la trasformación isométrica planteada a partir de las**	Cada grupo de trabajo Midió correctamente las longitudes de los lados y la amplitud de los ángulos internos del triángulo imagen; ∆A'B'C', y logró las construcciones que se muestran a continuación.	

orientaciones dadas en los ítem uno y dos; es decir: Ubicaron un punto (*D*) cercano al vértice *A*; A excepción del grupo número 4 quienes ubicaron el punto "D" cercano al vértice "C"; y a continuación trazaron las rectas $\overleftrightarrow{AD}$, $\overleftrightarrow{BD}$, $\overleftrightarrow{CD}$, Luego Eligieron la opción: *ángulo dada su amplitud*, **y desde cada vértice trazaron en sentido antihorario ángulos de 62°; uno para cada vértice de la preimagen, a continuación utilizaron la opción** *polígono* **y construyeron el** ***⊿A'B'C'*** **(imagen)**.

Actividad 3: **Mida correctamente las longitudes de los lados y la amplitud de los ángulos internos, triángulo imagen; ∆A'B'C'.**

Figura 5.
Construcción Estudiantes Actividad 1, 2 y 3.



Actividad 4: **Establezca la razón entre las longitudes de pares de lados correspondientes; ese resultado le insinúa algún tipo de relación entre la figura y su imagen?, si__, no__, explique.**

G1: $\frac{a}{a'}=\frac{6,04}{6,04}=1$ $\frac{b}{b'}=\frac{5,96}{5,96}=1$ $\frac{c}{c'}=\frac{4,83}{4,83}=1$ Si, insinúa que ***a'*** está una vez en ***a*** de manera que si está una vez, las magnitudes son iguales en todos los lados, de igual forma en los ángulos, por lo tanto la rotación permite la isometría.

G2: $\frac{a}{a'}=1$ $\frac{b}{b'}=1$ $\frac{c}{c'}=1$ Son de razón uno (1) por lo tanto la razón entre los lados homólogos nos indica que son iguales.

G3: Si porque las longitudes de pares de lados correspondientes siguen conservando sus valores; son iguales. $\frac{a}{a'}=\frac{5,83}{5,83}=1$ $\frac{b}{b'}=\frac{5,0}{5,0}=1$ $\frac{c}{c'}=\frac{3,0}{3,0}=1$

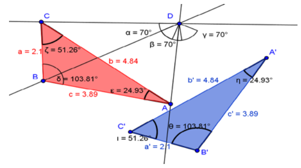
G4: El triángulo ABC y el triángulo A'B'C' son congruentes, ya que es el mismo triángulo la única diferencia es que ahora ha cambiado de dirección ya que fue rotado a 62°, pero sigue siendo el mismo. Este equipo de trabajo no evidencia el cálculo de la razón entre los pares de lados correspondientes, ni en la respuesta escrita ni en la Vista algebraica de GeoGebra.

G 5: Si, la razón entre los lados correspondientes de la figura es uno (1) por lo tanto se puede decir que las figuras son congruentes.
[La respuesta a esta pregunta la deducen y expresan los estudiantes de este equipo por simple inspección, ya que no hay evidencia de cálculo escrito ni en la vista algebraica del programa GeoGebra].

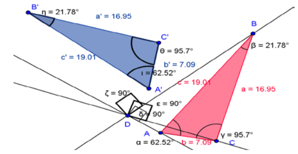
Actividad 5: **Identifique y marque cada par de ángulos y lados correspondientes (homólogos)).**

G1: Con respecto a la preimagen su homóloga, los ángulos serán iguales y de igual forma los lados, se mantienen las magnitudes de los ángulos y los lados

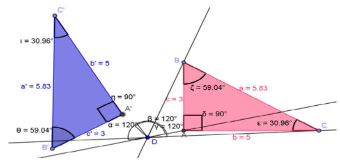
¿Cómo son las medidas de los ángulos y lados homólogos? A partir de las medidas de los lados y los ángulos de la preimagen y la imagen los estudiantes ratifican su concepto relacionado con lados correspondientes y lados homólogos.	G2: Las medidas de ángulos y lados homólogos son iguales. G3: Las medidas de los ángulos son suplementarios y congruentes al igual que los lados. G4: La medida de los ángulos y lados correspondientes son iguales ∆ABC: ∆A'B'C' Lados: $\overline{AB}$ = 127.64 $\overline{A'B'}$ = 127.64 $\overline{BC}$ = 106.22 $\overline{B'C'}$ = 106.22 $\overline{CA}$ = 168.26 $\overline{C'A'}$ = 168.26 *m∠A*:41.32° *m∠A'*:41.32° *m∠B: 68.37°* *m∠B': 68.37°* *m∠C : 70.32°* *m∠C': 70.32°* *Sí, claro que insinúa que son las mismas figuras; tan solo que ha sufrido una rotación, y, al devolver su ángulo de rotación estará en el mismo lugar.* G5: Las medidas de los ángulos y los lados correspondientes de las figuras son iguales.
Actividad 6**: Sin necesidad de haber medido las longitudes de los lados ni la amplitud de los ángulos del ∆A'B'C', ¿qué garantiza que éstos sean congruentes con los de la preimagen?**	G1: Que, al referirnos al concepto de rotación, nos referimos a trasformaciones isométricas, que será la trasformación en que se conservan todas las medidas. G2: Que si ponemos una imagen sobre la otra nos damos cuenta de que ocupan el mismo espacio. [Este equipo dio por hecho que los ángulos y los lados correspondientes de la preimagen y la imagen son congruentes y que como consecuencia se puede lograr la superposición de los objetos geométricos mencionados]. G3: La rotación es un movimiento angular de cada uno de los puntos de la preimagen a partir de un punto que es el centro de giro. [Expresan su concepto acerca de la rotación como trasformación geométrica pero no se preocupan por responder la pregunta]. G4: Nos garantiza que son congruentes ya que lo hemos trazado a partir de sus paralelas, en un programa donde es exacto y nos garantiza que serán iguales. [Trataron de dar respuesta al interrogante a partir del uso de las rectas paralelas, no obstante, no lograron la debida sustentación, a partir del hecho que la rotación es una trasformación geométrica del tipo isométrica que significa la conservación de las medidas de las magnitudes que intervienen, que en este caso son la longitud y la media angular]. G 5: Si, se garantiza, ya que la rotación es un tipo de transformación geométrica que no altera la forma ni el tamaño de la figura utilizada. Repita el proceso anterior, para ángulos de 70°, 90°, 120°, 150°, 180° **Figura 6.** *Construcciones Transformaciones.*



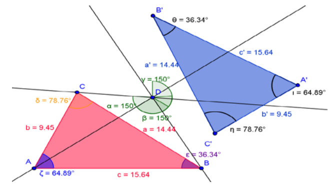
Trasformación -Rotación 70° -Construcción Grupo 1



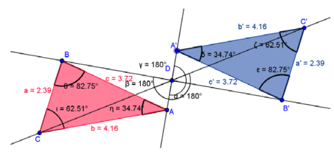
Trasformación -Rotación 90° -Construcción Grupo 2



Trasformación -Rotación 120° -Construcción Grupo 3



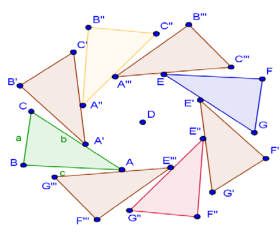
Trasformación -Rotación 150°-Construcción Grupo 4



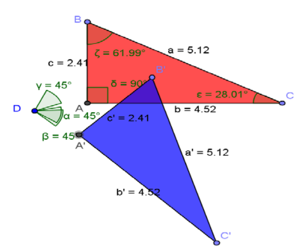
Trasformación -Rotación 180° -Construcción Grupo 5

Ahora, Elija la herramienta ***rotación del programa GeoGebra***, en la ventana emergente seleccione la opción: ***Sentido horario***, y haga variar la medida del ángulo de giro de 45 en 45°.

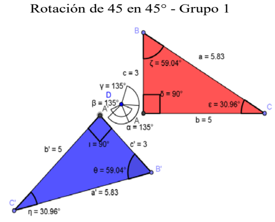
Figura 7.
Construcciones Rotaciones.



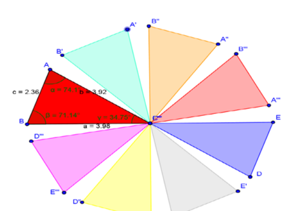
Rotación de 45 en 45° - Grupo 1



Rotación de 45 en 45° - Grupo 3



Rotación de 45 en 45°: 135° - Grupo 3



Rotación de 45 en 45° - Grupo 5

Actividad 7: **¿Cuál es la posición de la imagen (con respecto al triángulo original) cuando el ángulo de giro es 90°, 180°, 270°, 360°?**	G1: Se describe un giro de la imagen correspondiente a un eje de rotación en este caso invertido al sentido anti horario que fue el caso del punto 7. G2: [No respondieron la pregunta y *tampoco hicieron la construcción en GeoGebra*].

	G3: A medida que vamos rotando la preimagen con los ángulos dados en sentido horario, observamos que la figura forma una circunferencia opuesta a la de sentido anti horario hasta superponerse, cuando llegamos al ángulo 360° G4: [No respondieron la pregunta y *tampoco hicieron la construcción en GeoGebra]*. G5: A medida que vamos girando las figuras con los diferentes ángulos podemos ver que las imágenes nos van formando una circunferencia.
Actividad 8: **Ahora borre las imágenes del triángulo ABC; ubique un punto D cualquiera dentro del triángulo y construya la imagen rotada del triángulo ABC con respecto al punto D. Haga los desplazamientos necesarios para sobreponer las partes correspondientes de las dos figuras. Explique por qué es o no posible lograrlo. ¿Qué tipo de trasformación es esta?**	G1: Transformación directa dado que al deslizar la figura en este caso con respecto a un eje está rota y se logra sobreponer la imagen sobre la preimagen. [La Rotación como trasformación isométrica, si es una trasformación directa porque para lograr la Sobreposición de la imagen a la preimagen no es necesario salir del plano que las contiene, sino que se debe rotar esta última un ángulo de 360° con respecto al punto D que se encuentra en su interior]. G2: [No respondieron la pregunta y *tampoco hicieron la construcción en GeoGebra]*. G3: Si, si es posible lograr la superposición, cuando lo rotamos un ángulo de 360° se sobrepone la imagen con la preimagen; la transformación es directa. G4: [No respondieron la pregunta y *tampoco hicieron la construcción en GeoGebra]*. G5: No se puede porque solo desplazando no es posible acoplarlo perfectamente, hay necesidad de girarlo – rotarlo un ángulo de 360°.
Actividad 9: **¿Qué papel desempeña el punto D en el proceso de rotación? ¿En qué incide que el punto D esté cerca o lejos del triángulo?**	G1: El punto D es el eje de rotación; es el punto que permite que la imagen se mueva con respecto a los grados dados, no interesa que esté dentro o fuera de la figura. [También permite determinar la distancia entre los vértices de la preimagen y la imagen; siendo proporcional a la ubicación de D; es decir: entre más cerca esté D de la preimagen la distancia entre estás será menor y entre más lejos se localice el punto D de la preimagen mayor será la distancia entre el par de figuras]. G2: [No respondieron la pregunta y *tampoco hicieron la construcción en GeoGebra]*. G3: Es el punto eje de giro y de él depende la dirección de la figura; incide en la distancia que se ubica la imagen (la posición). [Con respecto a D se determina la dirección de giro de la figura]. G4: [No respondieron la pregunta y *tampoco hicieron la construcción en GeoGebra]*. G5: El papel que desempeña el punto D es que es el punto o centro de giro, si está dentro del triángulo no permite que se acople o superponga con solo utilizar el desplazamiento, pero si está por fuera sí es posible realizar el procedimiento. [Esta última aseveración es errónea, dado que en la trasformación isométrica – rotación la superposición solo se logra cuando el ángulo de giro es de 360° y es independiente de la ubicación del punto o centro de Giro D].

CONCLUSIONES

- Respecto del análisis de contenido se puede concluir que los estudiantes del segundo semestre del programa de Licenciatura en Matemáticas y Física lograron identificar y construir conocimientos de acuerdo a la estructura conceptual, haciendo uso de dos tipos de herramientas: convencionales - regla, escuadra, compás, transportador – y tecnológica: software de geometría dinámica. Adicionalmente establecen las formas de representar diversos objetos matemáticos y figuras geométricas, y en particular las transformaciones geométricas de tipo isométricas (pre-imagen e imagen congruentes). No menos importante fue lograr que el colectivo de estudiantes pudiera resolver situaciones problémicas a partir de eventos que involucran la rotación, la traslación y la reflexión en situaciones de contexto.

- En el análisis cognitivo se identificaron las competencias matemáticas, establecidas por el proyecto PISA 2012 - pensar y razonar, argumentar, comunicar, construir modelos, plantear y resolver problemas, representar, utilizar un lenguaje simbólico, formal y técnico, utilizar herramientas de apoyo - a fortalecer o desarrollar con la implementación de la tarea 1A y 1B; en cada tarea se estableció qué se esperaba que el estudiantes aprendiera y las expectativas sobre saber hacer con el conocimiento construido; así mismo y con base en las consultas de investigaciones y la experiencia propia del equipo investigador, se previeron: errores, dificultades y las posibles ayudas requeridas por los estudiantes; esto propició que cada uno de los cinco grupos de trabajo lograran un desarrollo y aprendizaje significativo de la tarea matemática propuesta.
- En el análisis de instrucción se llevó a cabo la selección, diseño, construcción de la tarea 1 sobre transformaciones isométricas: traslación, rotación y reflexión, la cual fue necesario dividir en dos sesiones de trabajo: la tarea 1A con herramientas convencionales y la tarea 1B con herramientas tecnológicas; para cada una de ellas se definió explícitamente las componentes: meta u objetivos de aprendizaje, las cuales tienen que ver con la función de la tarea; los recursos y materiales; las características de la tarea; la forma como se debían integrar los alumnos para el trabajo en grupo; el tipo de interacción; la temporalidad; el nivel de complejidad de la actividad en relación con la competencia matemática a desarrollar. Estos conceptos se sustentaron desde los aportes bibliográficos conocidos por el equipo investigador.
- En el análisis de la actuación se llevó a cabo para el seguimiento al desarrollo de las distintas actividades propuestas en la tarea 1A y 1B, en relación con el aprendizaje de los estudiantes y con el proceso de enseñanza, planificados en el análisis de instrucción. Este acompañamiento permitió reconocer que la tarea diseñada contaba con una extensión considerable, situación que indujo a desarrollarla en dos jornadas de trabajo; así mismo, la figuración y descripción de algunas actividades no eran pertinentes, haciéndose necesarias su reformulación y aclaración. Las ayudas previstas fueron pertinentes y de gran apoyo. En cuanto a la socialización e institucionalización del conocimiento fue desarrollado tal como estaba previsto: los grupos de trabajo presentaron sus conclusiones al colectivo, y entre estudiantes y profesores (investigadores) se dieron las explicaciones necesarias.
- El trabajo con el análisis didáctico y específicamente con el diseño de la unidad didáctica “Transformaciones geométricas en el plano”, ha permitido que el equipo investigador se

apropie de herramientas significativas para la planeación y gestión del currículo de matemáticas en el aula, específicamente de los espacios académicos "Las geometrías y el problema de la congruencia y la semejanza"; también ha propiciado que los maestros en formación reconozcan cómo se construyen ambientes de aprendizaje en los que se fomente el aprendizaje colaborativo mediado por herramientas convencionales como regla, escuadra, compás, transportador y de TICS, como el ordenador y el software de geometría dinámica GeoGebra.

- El Análisis Didáctico posibilita al programa de Licenciatura en Matemáticas y Física de la Universidad de la Amazonia, encaminar su proyecto educativo a la formación de profesionales de la educación matemática en cuanto que, por una parte, el análisis de contenido permite profundizar en el conocimiento disciplinar del objeto matemático "Transformaciones Isométricas en el plano", desde el estudio de su estructura conceptual, sistemas de representación, fenomenología y, por otra parte, en el conocimiento de su didáctica, a través de los análisis cognitivo y de instrucción.

BIBLIOGRAFÍA

Anton, H., 1991. Cálculo y Geometría Analítica. Volumen 1. Limusa. México.

Anton, H., 1997. Cálculo y Geometría Analítica. Volumen 2. Limusa. México.

Ariza, L. (2011). Trabajo Fin de Máster: Aplicación de la Semejanza al Cálculo de Distancias Inaccesibles. Curso 2010/2011. Máster Universitario de Formación de Profesorado de Enseñanza Secundaria Obligatoria, Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanza de Idiomas. Especialidad: Matemáticas. Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada. Recuperado de: http://fqm193.ugr.es/media/grupos/FQM193/cms/TFM_Laura_Ariza_2011.pdf

Cuellar, J. (2005). Matemáticas II para Bachillerato (1ra Edición). México: Editorial McGrawHill.

Bermúdez, D. (2011). Estudio de la congruencia de figuras planas: construcciones con regla y compas. Una Propuesta Para Sexto Grado. Trabajo de Grado. Maestría en Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales. Universidad Nacional de Colombia, Facultad de Ciencias, San Andrés Isla, Colombia. Recuperado de: http://www.bdigital.unal.edu.co/7045/1/186431.2011.pdf

Gascón, J. (2002). La dinámica de la actividad matemática: Reconstrucción institucional de una OM, XVIII Jornadas del SI-IDM, Organizadas por el grupo DMDC del SEIEM. Castellón. Recuperado de: http://www.ugr.es/local/jgodino/siidm.htm.

García, R. (2012). Figuras Semejantes y Aplicaciones de Semejanza. Propuesta de Unidad Didáctica. Universidad de Granada. Curso 2010/2011. Máster Universitario de Profesorado de Educación Secundaria Obligatoria, Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanza de Idiomas. Especialidad: Matemáticas. Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada. Recuperado de: http://fqm193.ugr.es/media/grupos/FQM193/cms/Raquel_Garcia.pdf

Gómez, P. (2007). Desarrollo del conocimiento didáctico en un plan de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria. Granada: Departamento de Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada. Recuperado de: http://funes.uniandes.edu.co/444/1/Gomez2007Desarrollo.pdf

Redón, A. (2000). Geometría paso a paso. Volumen 1. Ed. Tébar.

Millán, M.D. (2012) Formalización del concepto de semejanza. Introducción a sus aplicaciones en problemas prácticos. Máster Universitario de Formación del Profesorado de Enseñanza Secundaria Obligatoria, Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanza de Idiomas, especialidad de Matemáticas. Departamento de Didáctica de las Matemáticas. Universidad de Granada. Recuperado de: http://fqm193.ugr.es/media/grupos/FQM193/cms/TFM_MariaDoloresMillanVillegas_2011.pdf

Ministerio de Educación, Cultura y Deporte. (2014). Programa para la Evaluación Internacional de los Alumnos. Resultados y Contexto 2012. Madrid. Recuperado de: https://www.educacionyfp.gob.es/inee/dam/jcr:d5e1e2e2-37bd-4619-a68f-346ed8132b04/pisa2012.pdf

Montes, S. (2012). Una Propuesta Didáctica para la Enseñanza de Transformaciones Geométricas en el Plano con Estudiantes de Grado Séptimo Haciendo uso del Entorno Visual del Juego Pac-Man. Universidad Nacional de Colombia. Maestría en Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales. Bogotá D.C. Recuperado de: http://www.bdigital.unal.edu.co/7739/1/sergioandresmontesalarcon.2012.pdf.

Pimienta, P.; Acosta, V.; Ramos, O. y Villegas, G. (2006). Matemáticas III. (1ra Edición). México Pearson Prentice Hall.

Rangel, J.S. (2011). El teorema de Pitágoras y el teorema de Thales. Instrumento de evaluación desde de las Pruebas Saber. Trabajo de tesis para optar al título de Magister en Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales. Facultad de Ciencias. Universidad Nacional de Colombia. Bogotá, D.C. Recuperado de: http://www.bdigital.unal.edu.co/4870/1/El_teorema_de_Pit%C3%A1goras_y_el_teorema_de_Thales_Instrumento_de_evaluaci%C3%B3n_desde_de_las_Pruebas_Saber.pdf

Rico, L. (1997). Los organizadores del currículo de matemáticas. En L. Rico (Ed.), La educación matemática en la enseñanza secundaria (pp. 39-59). Barcelona: ice - Horsori.

Universidad de la Amazonia. (1999). Acuerdo 10 del Consejo Académico, por el cual se adopta una Línea de Investigación de Pedagogía y Didáctica de las Matemáticas. Facultad de Ciencias de la Educación.

__________. (2003). Acuerdo 23 del Consejo Académico, por el cual se adopta una línea de investigación para el programa académico de Matemáticas y Física adscrito a la Facultad de Ciencias de la Educación.

__________. (2006). Acuerdo 10 del Consejo Académico. Proyecto Curricular Licenciatura en Matemáticas y Física. Facultad Ciencias de la Educación. Licenciatura en Matemáticas y Física.

__________. (2013). Documento Maestro Programa Licenciatura en Matemáticas y Física. Facultad Ciencias de la Educación. Licenciatura en Matemáticas y Física.

Xhevdet THAQI. (2009). Aprender a Enseñar Transformaciones Geométricas en Primaria desde una Perspectiva Cultural. Tesis doctoral. Universidad de Barcelona. Barcelona. Recuperado de: http://diposit.ub.edu/dspace/bitstream/2445/41437/3/02.XT_PARTE_II.pdf.